R kommutativer Ring mit Eins

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in R[t]$$

$a_i \in R$

Def (2.3.5):

$$\tilde{f}: R \longrightarrow R$$
$$x \longmapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

in R

Polynomabbildung

Für festes $x \in R$:

$$\text{ausw}_x: R[t] \longrightarrow R$$
$$f \longmapsto \tilde{f}(x)$$

Auswertungsabb. an x

Notiz: Die Auswertungsabb. ist ein Ringhomomorphismus.

Def (2.3.10) Nullstelle von f:

$$\lambda \in R: \quad \tilde{f}(\lambda) = 0$$

$$(\text{aus}_\lambda(f) = 0)$$

Satz (2.3.10)

$\lambda \in R$ genau dann Nullstelle von $f \in R[t]$ wenn $f = (t-\lambda) \cdot q$ für ein $q \in R[t]$. Dieses q ist eindeutig.

Korollar (2.3.10) K Körper

$f \in K[t] \setminus \{0\}$ hat höchstens $\deg(f)$ verschiedene Nullstellen.

Def (2.3.10) K Körper, $f \in K[t]$, $\lambda \in K$.

Vielfachheit der NS λ:

$$\mu(f;\lambda) := \max\left\{ r \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists g \in K[t]: \\ f = (t-\lambda)^r \cdot g \end{array} \right\}$$

„mü"

Korollar (2.3.11)

Jedes $f \in K[t] \setminus \{0\}$ hat

die Form

$$f = g \cdot (t-\lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{r_k},$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen NS von f sind,

$r_i := \mu(f; \lambda_i)$

$g \in K[t]$ ohne NS.

<u>Fundamentalsatz der Algebra</u> (2.3.11)

Jedes $f \in \mathbb{C}[t]$ von Grad ≥ 1 besitzt eine Nullstelle. $\square$

<u>Korollar</u>

Jedes $f \in \mathbb{C}[t]$ hat die Form

$$f = a \cdot (t-\lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{r_k}$$

mit $a \in \mathbb{C}$.

„f zerfällt in Linearfaktoren"

(2.3.12)

Struktursatz für reelle Polynome:

Jedes $f \in \mathbb{R}[t]$ hat die Form

$$\overset{0 + 2 + \ldots + 2 + r_1 + \ldots + r_k}{f = a \cdot g_1 \cdot \ldots \cdot g_m \cdot (t-\lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{r_k}}$$

mit $a \in \mathbb{R}$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R})$, $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[t]$ ohne Nullstellen, $\deg(g_i) = 2$

Korollar aus Struktursatz:

Jedes reelle Polynom von ungeradem Grad hat mindestens $\underbrace{\text{eine Nullstelle}}_{\text{reelle}}$.